Digitale Bibliothek Braunschweig

[rho]-Differenzen von Mengen nichtnegativer ganzer Zahlen

Härtter, Erich

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 33, 1982, S.151-156

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052581

Digitale Bibliothek Braunschweig

ϱ-Differenzen von Mengen nichtnegativer ganzer Zahlen

Von **Erich Härtter**, Mainz

1. Neben der Addition von Mengen $\subseteq \mathbb{N}_0$ wurden wiederholt auch Differenzen solcher Mengen betrachtet. Es sind hier u.a. zu nennen Arbeiten von A. Brauer (1945) [1], Erdös-Gál (1948) [3], Rédei-Rényi (1949) [10], Kasch (1955) [8], Leech (1956) [9], Haselgrove-Leech (1957) [7], Wichmann (1963) [12], Sierpiński (1964) [11], Härtter (1968) [5], Bereková (1972) [2], Golay (1972) [4], Härtter-Hofmeister-Zöllner (1978) [6]. Meistens wurde das Problem behandelt, eine Menge A von natürlichen Zahlen mit minimaler Elementeanzahl zu finden, so daß alle Zahlen $1,2,\ldots,N$ als Differenz zweier Elemente aus A darstellbar sind. Weniger wurde jedoch der Frage nachgegangen, Dichteaussagen, wie man sie für die Addition von Mengen kennt, auch für Differenzen von Mengen zu gewinnen. Aussagen in dieser Richtung finden sich in [11], [5] und [2]. Bei allen diesen Untersuchungen lag im wesentlichen folgender Begriff der Differenz zweier Mengen $A,B \subseteq \mathbb{N}_0$ zu Grunde:

Definition 1: $A-B:=\{z\in\mathbb{N}_0 \mid z=a-b;\ a\in A,\ b\in B\}$.

Es sollen hier nun Differenzen zweier Mengen $A,B\subseteq\mathbb{N}_0$ unter einer gewissen Restriktion betrachtet werden; wir geben dazu folgende

Definition 2: Seien $A,B\subseteq\mathbb{N}_0$ und $\varrho\in\mathbb{R}$ mit $0<\varrho\leqq 1$. Dann heißt

$$A \underset{\varrho}{-} B:=\{z\in\mathbb{N}_0 \mid z=a-b;\ a\in A,\ b\in B \text{ mit } b\leqq\varrho\, a\}$$

ϱ-Differenz von A und B.

Im Spezialfall $\varrho=1$ erhält man Definition 1, und Definition 2 mit $\varrho=\frac{1}{2}$ wurde in [5] benutzt.

Einige einfache Eigenschaften der Differenz „$\underset{\varrho}{-}$“ seien genannt:

(1) $\{0\}$ ist Nullelement für diese Subtraktion.

(2) a) $(A\cup B)\underset{\varrho}{-}C=(A\underset{\varrho}{-}C)\cup(B\underset{\varrho}{-}C)$;
b) $(A\cap B)\underset{\varrho}{-}C\subseteq(A\underset{\varrho}{-}C)\cap(B\underset{\varrho}{-}C)$;
c) $A\underset{\varrho}{-}(B\cup C)=(A\underset{\varrho}{-}B)\cup(A\underset{\varrho}{-}C)$;
d) $A\underset{\varrho}{-}(B\cap C)\subseteq(A\underset{\varrho}{-}B)\cap(A\underset{\varrho}{-}C)$ für alle $A,B,C\subseteq\mathbb{N}_0$.

Wir geben hier, da die Beweise ähnlich verlaufen, nur den

Beweis von (2)a): Sei $x\in(A\cup B)\underset{\varrho}{-}C$;

$\Rightarrow x=a-c_i$ mit $a\in A$, $c_i\in C$ und $c_i\leqq\varrho a$ oder
$x=b-c_j$ mit $b\in B$, $c_j\in C$ und $c_j\leqq\varrho b$;
$\Rightarrow x\in(A\underset{\varrho}{-}C)\cup(B\underset{\varrho}{-}C)$.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052581

Digitale Bibliothek Braunschweig

Die umgekehrte Richtung zeigt man ebenso.

Weiter gilt

(3) $(A \underset{\varrho}{-} B) \underset{\varrho}{-} C \supseteq A \underset{\varrho}{-} (B+C)$ für alle $A, B, C \subseteq \mathbb{N}_0$.[1])

Beweis: Sei $x \in A \underset{\varrho}{-} (B+C)$;

$\Rightarrow x = a-(b+c)$ mit $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ und $b+c \leqq \varrho a$;
$\Rightarrow x = (a-b)-c$ mit $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ und $b \leqq \varrho a$; $c \leqq \varrho a - b \leqq \varrho\,(a-b)$;
$\Rightarrow x \in (A \underset{\varrho}{-} B) \underset{\varrho}{-} C$.

Bemerkung: Für $\varrho = 1$ gilt in (3) das Gleichheitszeichen, wie in [6] gezeigt wurde.

2. Für die ϱ-Differenz von Mengen gilt, wie in [5] bemerkt, ein Analogon zum Mannschen Satz nicht. Im weiteren sollen zunächst einige Dichteaussagen für ϱ-Differenzen von Mengen, die Analoga zu bekannten Resultaten für die Addition von Mengen sind, hergeleitet werden. Der Schlußteil der Arbeit bringt dann einen Satz über Differenzminimalbasen.

Dazu sei für das Folgende $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ eine monoton wachsende Funktion mit $\varphi(x) \leqq x$ für alle $x \in \mathbb{N}$ und $k := \min\left(1, \frac{\varrho}{1-\varrho}\right)$. Wir beweisen zunächst einen

Hilfssatz: Seien $A, B \subseteq \mathbb{N}_0$ und $A \underset{\varrho}{-} B \not\supseteq \mathbb{N}$; d.h. es gibt $\hat{x} \in \mathbb{N}$ mit $\hat{x} \in \overline{A \underset{\varrho}{-} B}$. Dann gilt die Ungleichung[2])

$$k\varphi(\hat{x}) \geqq A(\hat{x} + k\varphi(\hat{x})) - A(\hat{x}) + B(k\varphi(\hat{x})).$$

Beweis: Sei $B \cap [1, k\varphi(\hat{x})] = \{b_1, \ldots, b_r\}$, also $B(k\varphi(\hat{x})) = r$ $(r \geqq 0)$[3]). Nun betrachten wir die Zahlen $\hat{x}+b_1, \ldots, \hat{x}+b_r$. Diese sind $\notin A$, denn

$b_j \leqq k\varphi(\hat{x}) \leqq k\,\hat{x}$;
für $\varrho \geqq \frac{1}{2}$ ist $k = 1$, also $b_j \leqq \hat{x}$;
$b_j(1-\varrho) \leqq b_j \varrho \leqq \varrho \hat{x}$;
$b_j \leqq \varrho(\hat{x} + b_j)$;
für $\varrho < \frac{1}{2}$ ist $k = \frac{\varrho}{1-\varrho}$, also $b_j \leqq \frac{\varrho}{1-\varrho}\,\hat{x}$ und ebenso $b_j \leqq \varrho(\hat{x}+b_j)$;

also wäre $(\hat{x}+b_j) - b_j = \hat{x} \in A \underset{\varrho}{-} B$ $\quad (j = 1, \ldots, r)$.

Sei $\bar{A}$ die Komplementärmenge von A. Wegen $1 \leqq b_j \leqq k\varphi(\hat{x}) \Rightarrow \hat{x} < \hat{x}+b_j \leqq \hat{x} + k\varphi(\hat{x})$;

$\Rightarrow \bar{A}(\hat{x}+k\varphi(\hat{x})) - \bar{A}(\hat{x}) \geqq r$;
$\hat{x} + k\varphi(\hat{x}) - A(\hat{x}+k\varphi(\hat{x})) - \hat{x} + A(\hat{x}) \geqq r$,

woraus man sofort die Behauptung erhält.

---

[1]) Dabei ist wie üblich
$B+C := \{z \in \mathbb{N}_0 \mid z = b+c;\ b \in B;\ c \in C\}$.

[2]) Dabei bedeutet wie üblich für eine Menge $A \subseteq \mathbb{N}_0$
$A(x) := \sum\limits_{\substack{0<a\leqq x\\ a\in A}} 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

[3]) $r = 0$ bedeutet, daß die Menge leer ist.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052581

Digitale Bibliothek Braunschweig

Diesen Hilfssatz benutzen wir, um einige Dichteaussagen für die ϱ-Differenz zweier Mengen A und B herzuleiten; ein Spezialfall mit $\varrho = 1$ wurde schon in [5] behandelt.

Satz 1: Seien $A, B \subseteq \mathbb{N}_0$ und

$$\inf_{x \in \mathbb{N}} \frac{A(x+k\varphi(x)) - A(x)}{k\varphi(x)} =: \alpha'(\varrho,\varphi), \quad \inf_{x \in \mathbb{N}} \frac{B(k\varphi(x))}{k\varphi(x)} =: \beta(\varrho,\varphi)$$

sowie $\alpha'(\varrho,\varphi) + \beta(\varrho,\varphi) > 1$. Dann gilt $A \underset{\varrho}{-} B \supseteq \mathbb{N}$.

Beweis: Wäre $A \underset{\varrho}{-} B \not\supseteq \mathbb{N}$, dann gäbe es ein $\hat{x} \in \mathbb{N}$ mit $\hat{x} \in \overline{A \underset{\varrho}{-} B}$. Nach dem Hilfssatz wird

$$\begin{aligned} k\varphi(\hat{x}) &\geqq A(\hat{x}+k\varphi(\hat{x})) - A(\hat{x}) + B(k\varphi(\hat{x})) \geqq \\ &\geqq (\alpha'(\varrho,\varphi) + \beta(\varrho,\varphi))\, k\varphi(\hat{x}) > k\varphi(\hat{x}), \end{aligned}$$

womit wir einen Widerspruch haben.

Bemerkung: 1) Im Spezialfall $\varphi(x) = x$ und $\varrho \geqq \frac{1}{2}$ wird

$$\alpha'(\varrho,\varphi) = \inf_{x \in \mathbb{N}} \frac{A(2x) - A(x)}{x} \quad \text{und } \beta(\varrho,\varphi) \text{ gleich der Dichte von B.}$$

2) Es würde genügen, $A \subseteq \mathbb{N}$ vorauszusetzen.

Für die nächste Aussage treffen wir folgende

Definition 3: $A, B \subseteq \mathbb{N}_0$ heißen asymptotisch gleich

$$\Leftrightarrow \text{ es gibt ein } N \in \mathbb{N}, \text{ so daß } A \cap [N,\infty[\; = B \cap [N,\infty[.$$

Wir schreiben $A \sim B$.

Satz 2: Seien $A, B \in \mathbb{N}_0$ und

$$\varliminf_{x \in \mathbb{N}} \frac{A(x+k\varphi(x)) - A(x)}{k\varphi(x)} = \underline{\alpha}'(\varrho,\varphi), \quad \varliminf_{x \in \mathbb{N}} \frac{B(x)}{x} =: \underline{\beta} \text{ sowie } \underline{\alpha}'(\varrho,\varphi) + \underline{\beta} > 1.$$

Dann gilt $A \underset{\varrho}{-} B \sim \mathbb{N}$.

Beweis: Sei $\underline{\alpha}'(\varrho,\varphi) + \underline{\beta} = 1 + 2\delta$ $(\delta > 0)$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein n_1 und ein n_2, so daß gilt

$$\begin{aligned} &A(x+k\varphi(x)) - A(x) \geqq (\underline{\alpha}'(\varrho,\varphi) - \varepsilon)\, k\varphi(x) && \text{für alle } x \geqq n_1 \text{ und} \\ &B(k\varphi(x)) \geqq (\underline{\beta} - \varepsilon)\, k\varphi(x) && \text{für alle } x \geqq n_2. \end{aligned}$$

Wäre $A \underset{\varrho}{-} B \not\sim \mathbb{N}$, dann gäbe es eine unendliche Menge von Zahlen $\hat{x} \in \mathbb{N}$ mit $\hat{x} \in \overline{A \underset{\varrho}{-} B}$. Unter Benutzung des Hilfssatzes erhalten wir

$$k\varphi(\hat{x}) \geqq (\underline{\alpha}'(\varrho,\varphi) + \underline{\beta} - 2\varepsilon) k\varphi(\hat{x}) \quad \text{für alle } \hat{x} \geqq \max(n_1, n_2).$$

Wir wählen nun $\varepsilon < \delta$;

$$\Rightarrow k\varphi(\hat{x}) > (\underline{\alpha}'(\varrho,\varphi) + \underline{\beta} - 2\delta)\, k\varphi(\hat{x}) = k\varphi(\hat{x}),$$

womit wir einen Widerspruch haben.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052581

Digitale Bibliothek Braunschweig

Bemerkung: 1) Das Beispiel $A = \{x \in \mathbb{N} | x \equiv 0 (\text{mod } 2)\} = B$ zeigt, daß in Satz 2 die Ungleichung $\underline{\alpha}'(\varrho,\varphi) + \underline{\beta} > 1$ nicht durch $\underline{\alpha}'(\varrho,\varphi) + \underline{\beta} \geqq 1$ ersetzt werden kann.

2) Auch hier würde es genügen, $A \subseteq \mathbb{N}$ anzunehmen.

3. Für das Weitere geben wir folgende Definitionen: Dazu seien $M \subseteq \mathbb{N}$ und wie bisher $\varrho \in \mathbb{R}$ mit $0 < \varrho \leqq 1$:

Definition 4: $A \subseteq \mathbb{N}_0$ heißt ϱ-Differenzbasis für $M \Leftrightarrow M \subseteq A \underset{\varrho}{-} A$.

Definition 5: $A \subseteq \mathbb{N}_0$ heißt asymptotische ϱ-Differenzbasis für $M \Leftrightarrow$ es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, so daß $M \cap [N, \infty[\subseteq A \underset{\varrho}{-} A$.

Definition 6: Sei A ϱ-Differenzbasis für M und $a \in A$. Dann bedeutet

$$E(a) := \{z \in M | z \notin (A \backslash \{a\}) \underset{\varrho}{-} (A \backslash \{a\})\}.$$

Entsprechend für asymptotische ϱ-Differenzbasen.

Definition 7: Eine ϱ-Differenzbasis A für M heißt ϱ-Differenzminimalbasis $\Leftrightarrow |E(a)| \geqq 1$ für alle $a \in A$;

eine asymptotische ϱ-Differenzbasis A für M heißt asymptotische ϱ-Differenzminimalbasis $\Leftrightarrow |E(a)| = \infty$ für alle $a \in A$.

Für $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ sprechen wir von einer ϱ-Abschnittsdifferenzbasis bzw. einer ϱ-Abschnittsdifferenzminimalbasis für n.

Offenbar ist in jeder ϱ-Differenzbasis für eine endliche Menge M eine ϱ-Differenzmininalbasis für M als Teilmenge enthalten.

Wir betrachten weiterhin den Fall $\varrho = 1$ und setzen $A \underset{1}{-} B =: A - B$ und sprechen außerdem kurz von Differenzbasen, asymptotischen Differenzbasen, Differenzminimalbasen usw. statt von 1-Differenzbasen, asymptotischen 1-Differenzbasen und 1-Differenzminimalbasen. Nachdem in [5] schon die Existenz von Differenzminimalbasen bewiesen worden ist, zeigen wir nun

Satz 3: Es gibt asymptotische Differenzminimalbasen für jede unendliche Menge $M = \{m_1 < m_2 < \ldots < m_n < \ldots\} \subseteq \mathbb{N}$.

Beweis: Induktiv konstruieren wir nun eine asymptotische Differenzminimalbasis für M. Sei $A_1 := \{a_0 = 0, a_1 = m_1\}$.

Für $n \geqq 1$ sei $A_n := \{a_0, a_1, a_2 \ldots\} \subseteq \mathbb{N}_0$ schon konstruiert. Wir setzen für

(I) $m_{n+1} \in A_n - A_n$ die Menge $A_{n+1} := A_n$, und für

(II) $m_{n+1} \notin A_n - A_n$ machen wir eine Fallunterscheidung:

a) Wir setzen $A^*_{n+1} := A_n \cup \{m_{n+1} + a_j\}$ mit $a_j \in A_n$, aber nur falls $m_{n+1} > 2 \max A_m$, wobei m der Induktionsschritt ist, bei dem zum letzten Mal nach (II)a) verfahren wurde; dann bestimmen wir eine in A^*_{n+1} enthaltene

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052581

Digitale Bibliothek Braunschweig

Differenzminimalbasis A_{n+1} für $M \cap [1, m_{n+1}]$; dabei bleibt $A_m \subset A_{n+1}$. – Die Menge A_1 kann hier zum ersten Mal an Stelle von A_m auftreten.

Bei diesem Induktionsverfahren soll a_j unendlich oft die Elemente der schon konstruierten Mengen etwa nach dem folgenden Schema durchlaufen:

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_0 & \longrightarrow & a_1 & & a_2 & \longrightarrow & a_3 & & a_4 \ldots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & \\
a_0 & & a_1 & & a_2 & & a_3 \ldots & & \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & \\
a_0 & & a_1 & & a_2 \ldots & & & & \\
 & \swarrow & & \nearrow & & & & & \\
a_0 & \longrightarrow & a_1 \ldots & & & & & & \\
\ldots & & & & & & & &
\end{array}$$

b) Sonst setzen wir $A_{n+1} := A_n \cup \{c_{n+1}, c_{n+1} + m_{n+1}\}$ mit $c_{n+1} > 2 \max A_n$.

Dann bilden wir $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Nun ist A nach Konstruktion asymptotische Differenzbasis für M. Ferner ist $|E(a)| > 0$ für alle $a \in A$, denn für $a_j \in A_n$ ist nach (II) a) sicher $m_{n+1} \in E(a_j)$, da $m_{n+1} = (m_{n+1} + a_j) - a_j$ wegen $m_{n+1} > 2 \max A_m$ nach (II) a) eindeutig dargestellt wird. Schließlich ist $|E(a)| = \infty$ für jedes $a \in A$.

Bemerkung: Da im Induktionsschritt (II) b) jeweils die Wahl zwischen mehreren Konstruktionsmöglichkeiten besteht, ist die Klasse der asymptotischen Differenzminimalbasen für jede unendliche Menge $M \subseteq \mathbb{N}$ von der Mächtigkeit des Kontinuums.

Literaturverzeichnis

[1] Brauer, A.: A problem in additive number theory and its application in electrical engineering. Journ. of the Elisha Mitchell Scientific Soc. **61** (1945), 55–66.

[2] Bereková, H.: On difference sets of sets of non-negative integers. Acta Fac. Rerum Natur. Univ. Comenian. Math. Publ. **27** (1972), 107–115.

[3] Erdös, P. and I. S. Gál: On the representation of 1,2,...N by differences. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. **51** (1948), 1155–1158 = Indagationes Math. **10** (1948), 379–382.

[4] Golay, M. J. E.: Notes on the representation of 1,2,...n by differences. Journ. London Math. Soc., II. Ser. **4** (1972), 729–734.

[5] Härtter, E.: Differenzen von Mengen nichtnegativer ganzer Zahlen. Journ. reine und angew. Math. **232** (1968), 112–117.

[6] Härtter, E., G. Hofmeister und J. Zöllner: Relativnullen und reduzible Mengen bei Differenzen von Mengen ganzer Zahlen. Journ. reine und angew. Math. **299/300** (1978), 301–317.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052581

Digitale Bibliothek Braunschweig

[7] Haselgrove, C.B. and J. Leech: Note on restricted difference bases. Journ. London Math. Soc. **32** (1957), 228–231.

[8] Kasch, F.: Abschätzung der Dichte von Summenmengen. Math. Z. **62** (1955), 368–387; S. 385 folg.

[9] Leech, J.: On the representation of 1, 2, ... n by differences. Journ. London Math. Soc. **31** (1956), 160–169.

[10] Rédei, L. und A. Rényi: Über die Darstellung der Zahlen 1, 2, ... N mittels Differenzen (Russisch). Mat. Sbornik N.S. **24** (66) (1949), 385–389.

[11] Sierpiński, W.: Sur une propriété des nombres naturels. Elemente Math. **19** (1964), 27–29.

[12] Wichmann, B.: A note on restricted difference bases. Journ. London Math. Soc. **38** (1963), 465–466.

http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052581